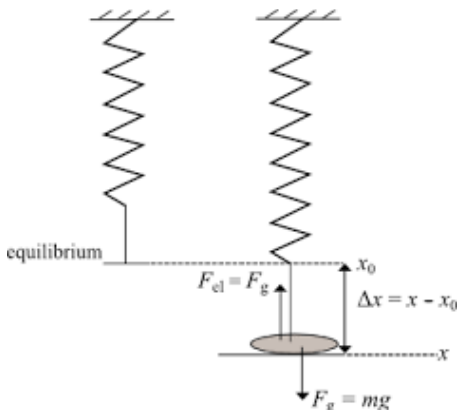
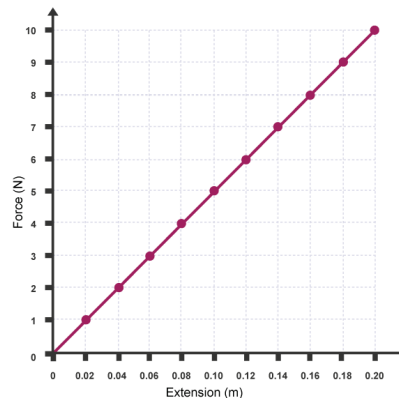


Gumka zawieszona na haczyku znajduje się w stanie równowagi. Gdy przyłożymy obciążenie, długość gumki zmieni się o Δx , ponieważ działać na nią będzie siła rozciągająca $F=mg$, gdzie „m” to masa „obciążnika”, a „g” to przyspieszenie ziemskie) (Ryc. 1 i 2).



Ryc.1. Schemat statycznej próby rozciągania.



Ryc. 2. Wykres zależności F od Δx .

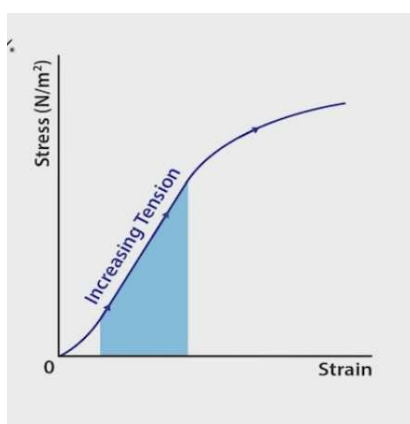
Wg prawa Hooke'a (gdy analizowany materiał jest ciałem idealnie sprężystym) odkształcenie (ϵ) ciała jest proporcjonalne do przyłożonego obciążenia F wywołującego naprężenia (δ). Ogólnie zależność tę opisać można wzorem $F=k*\Delta x$, gdzie F to siła rozciągająca, k to stała/współczynnik sprężystości (inna dla każdego badanego materiału), Δx to wydłużenie ciała.

Odkształcenie (ϵ) definiujemy jako zmianę długości badanej próby (Δx) w odniesieniu do długości wyjściowej tej próby (x_0) i określamy wzorem $\epsilon= \Delta x/x_0$.

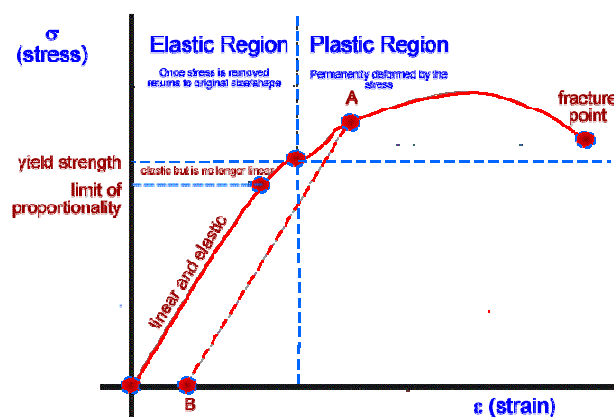
Naprężenie (δ) czyli siła F [N] działająca na ciało o przekroju poprzecznym A [m²] wyrażamy wzorem $\delta=F/A$. Jednostką naprężenia jest Pa (jeden paskal definiowany jest jako stosunek siły jednego niutona działającej na powierzchnię jednego metra kwadratowego).

Gumka nie jest ciałem idealnie sprężystym i będzie spełniać prawo Hooke'a tylko w ograniczonym zakresie (Ryc. 3). Warunkiem koniecznym jest to, że zależność odkształcenia od naprężenia będzie miała charakter liniowy. Dla tego ograniczonego zakresu wyznaczyć można przybliżoną wartość modułu Younga (Y) (Ryc. 4).

Z definicji wartość modułu Younga można określić jako naprężenie, przy którym długość rozciąganego ciała ulega podwojeniu. W praktyce jednak prawo Hooke'a przestaje obowiązywać przy znacznie mniejszych odkształceniach.



Ryc. 3A



Ryc. 3B

Przykładowy przebieg zależności między odkształceniem (ang. strain) a naprężeniem (ang. stress).

Posiadając odpowiednie narzędzia matematyczne moduł Younga można wyznaczyć z dużą dokładnością. Na potrzeby niniejszego ćwiczenia moduł Younga należy wyznaczyć w zakresie stosowalności prawa Hooke'a (Ryc. 4).

Nanosząc punkty pomiarowe na wykres stosunku δ od ϵ należy zidentyfikować te, które leżą w jednej linii. Zależność liniową zmiennych określić można stosując specjalne programy matematyczne, statystyczne lub w sposób graficzny.

Jeśli przez zidentyfikowane uprzednio punkty (leżące mniej więcej w jednej linii) przeprowadzimy prostą, będzie można opisać ją odpowiednim wzorem $y=a*x+b$. Wówczas zmienne „y” opisywać będą odnotowane naprężenie, a zmienne „x” opisywać będą odkształcenie. Zatem wzór określający prostą przebiegającą przez zmienne charakteryzujące się zależnością liniową na naszym wykresie zapisać można jako $\delta=Y*\epsilon+b$. Korzystając z tej zależności należy obliczyć współczynnik kierunkowy prostej czyli Y.

Współczynnik kierunkowy „a” prostej $y=ax+b$ można obliczyć ze wzorów:

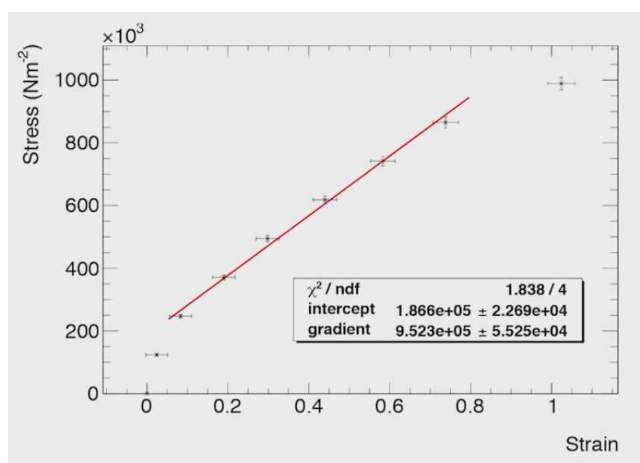
$a=\text{tg}\alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia wykresu funkcji do osi X

LUB

$a=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$, gdzie (x_1,y_1) i (x_2,y_2) są współrzędnymi dwóch punktów należących do wykresu funkcji

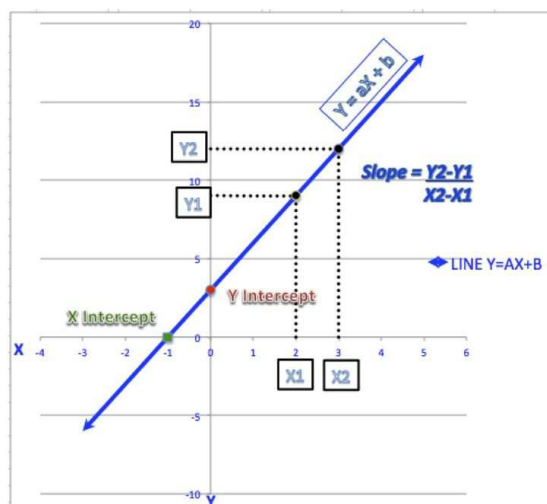
LUB

wykorzystując programy komputerowe (np. MS Excel).



Ryc. 4A

Przykładowy przebieg zależności między odkształceniem, a naprężeniem dla gumki recepturki z wyznaczoną wartością modułu Younga (gradient) i metoda wyznaczenia Y.



Ryc. 4B

LITERATURA

1. J. Błaszczak „Biomechanika kliniczna”, PZWL Warszawa 2004.

JAK OBLICZYĆ MODUŁ ELASTYCZNOŚCI?

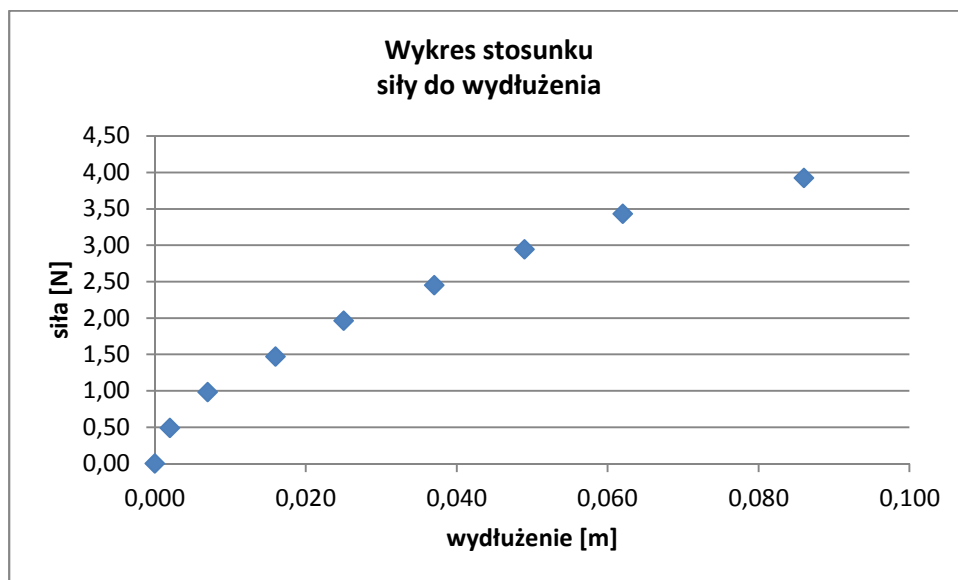
1. Wprowadź dane pomiarowe i wszystkie stałe do arkusza kalkulacyjnego (excel lub dowolny inny).
2. Oblicz:
 - siłę działającą na gumkę ($F=mg$)
 - odkształcenie ($\epsilon=\Delta x/x_0$)
 - naprężenie ($\delta=F/A$)

PRZYKŁADOWE DANE I OBLICZENIA

POMIAR	masa [kg]	długość [m]	wydłużenie (Δx)	F [N]	odkształcenie ϵ	naprężenie δ [N/m ²]
0	0,00	0,084	0,000	0,00	0,00	0,00E+00
1	0,05	0,086	0,002	0,49	0,02	1,24E+05
2	0,10	0,091	0,007	0,98	0,08	2,47E+05
3	0,15	0,100	0,016	1,47	0,19	3,71E+05
4	0,20	0,109	0,025	1,96	0,30	4,94E+05
5	0,25	0,121	0,037	2,45	0,44	6,18E+05
6	0,30	0,133	0,049	2,94	0,58	7,41E+05
7	0,35	0,146	0,062	3,43	0,74	8,65E+05
8	0,40	0,170	0,086	3,92	1,02	9,88E+05

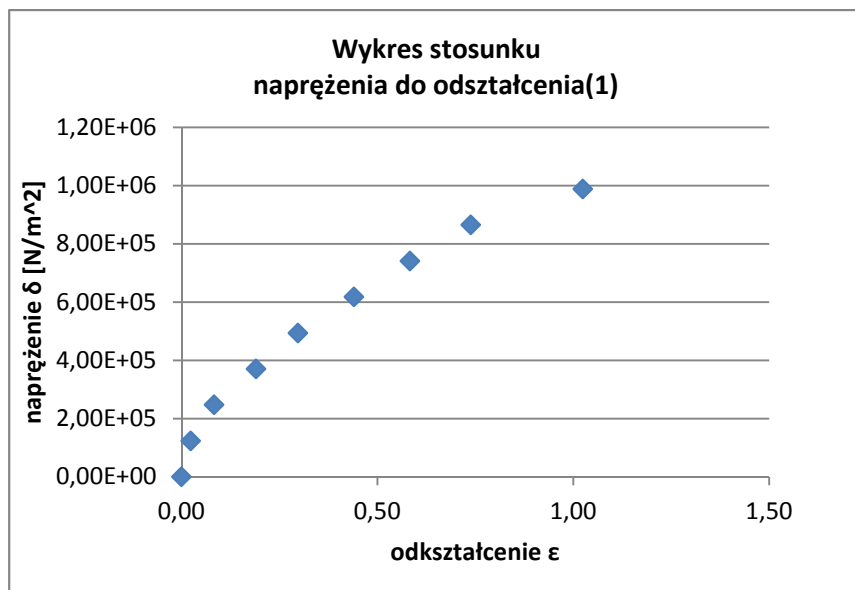
długość wyjściowa gumki	0,084	[m]
powierzchnia przekroju poprzecznego ¹	3,97E-06	[m ²]
g	9,807	[m/s ²]

3. Sporządź wykresy stosunków:
 - siły do wydłużenia

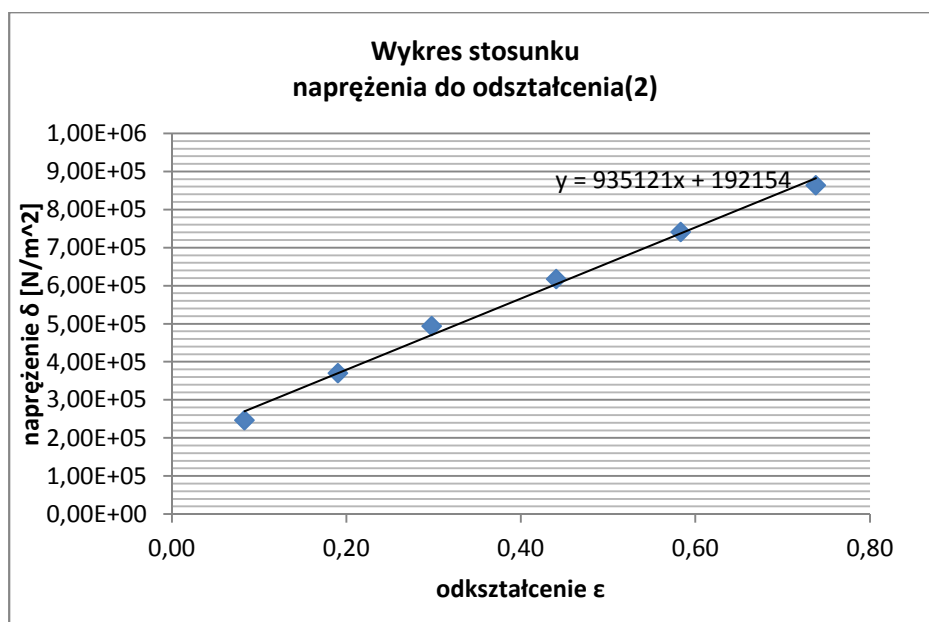


¹ $A=2 \cdot ab$, gdzie a i b to wymiary boków gumki. Mnożymy *2, bo w rzeczywistości gumka była „podwójna”, a tym samym powierzchnia na którą oddziaływała siła była 2 razy większa.

- naprężenia do odkształcenia



- Na wykresie naprężenia do odkształcenia zidentyfikuj co najmniej 3 punkty*, które charakteryzują się zależnością liniową (leżą w jednej linii)².
 *w wybranym przykładzie będzie to 6 punktów
- Dla tych wybranych punktów sporządź osobny wykres odkształcenia do naprężenia.
- Na nowym wykresie wyznacz linię trendu wraz z funkcją określającą ten trend*.
 *dla MS Excel 2010: kliknij prawym klawiszem myszki na serie danych (czyli na dowolny punkt na wykresie), wybierz „Dodaj linię trendu”, następnie w oknie „Typ trendu” wybierz „Liniowy” i zaznacz opcję „wyświetl równanie na wykresie”.



- Na podstawie otrzymanych danych określ przybliżoną wartość modułu Younga [Gpa]* dla badanego materiału³. Porównaj otrzymany wynik do standardów wyznaczonych dla gumy.

² Do tych obliczeń należałoby wykorzystać specjalne programy, które takie zależności liniowe wykryją. Na potrzeby ćwiczenia proszę dokonać subiektywnej oceny otrzymanych wyników i wybrać 3 sąsiadujące punkty, które leżą mniej więcej w jednej linii.

³ W klasycznym wydaniu tego eksperymentu należałoby posłużyć się wzorem $Y = (F \cdot x) / (A \cdot \Delta x)$ uwzględniając błędy pomiaru. Na potrzeby ćwiczenia proszę określić Y na podstawie współczynnika kierunkowego prostej wykreślonej za pomocą opcji „linii trendu”.